哇奥！行列式及其性质。

$\det(A)$

每个方阵，意思是其余矩阵没有行列式喽。

$\det(A)=0$ 意味着矩阵不可逆，怪不得说不可逆是奇异的，0 确实是称得上一个奇异点。

似乎要公理化定义行列式？开玩笑的。

实际上，这是在以创造者的视角来考虑行列式。这么多人不懂行列式可能真的是因为它本来就不是什么应该去强行赋予什么意义的东西，**对待这种东西最不应该强迫自己听懂，而是尝试解构它，然后重新创造它。**

1. 单位方阵的行列式为 1

2. 行交换使得行列式取负

$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$，这个式子似乎给出了一些暗示。

试试行交换，$\det\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} = bc - ad = -(ad - bc)$

符合第二条。

第一条显然也符合。

哦，似乎有些提前看答案了，要补充一些性质之后才能推出 $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$。

第三条性质是关于行列式函数的线性组合的：

3a.

$$\det\begin{pmatrix} ta & tb \\ c & d \end{pmatrix} = t\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

3b.

$$\det\begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c & d \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a' & b' \\ c & d \end{pmatrix}$$

第三条是在说：行列式乘以常数，代表某一个特定的行乘以这个常数，行列式相加，代表某一个特定的行相加（但其它行必须相等）。

总的来说，从性质 1 来看，行列式像一种代数。从性质 2 来看，行列式似乎想与矩阵的行向量扯上关系，它想度量什么呢？说实话很难懂，似乎与矩阵置换群的的性质有关。性质 3 直接与矩阵的数值相关，说实话用它可以直接把一个矩阵的行列式分解到十分简单的情形。

性质 2 可以推出两行相等的矩阵行列式为零。（性质 4）

接下来的性质比较关键：**消元不改变行列式。**（性质 5）

这个为什么能成立呢，其实比较显然，也会用到刚刚才推出来的性质 4（在下一页）

$$\det\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_k - tr_i \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_k \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ -tr_i \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$$

后面那一项是 $-t\det\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$，其实也就是 0（我是独立推导的！😎）

然后是性质 6，只要有一行为零，行列式就为零。这个可以从性质 3a 推出。

性质 7，求 $\det U$，首先消元之前要行交换，所以我们定性地思考：$\det U = \pm\det A$，然后我们可以自然地想到 $\det U$ 还可以通过只消元不行交换得到一个对角矩阵，然后我们可以通过性质 3a 分解这个对角矩阵的行列式，于是结果就是：对角矩阵上的元素的乘积。

性质 8，$\det A = 0$ 当且仅当 A 不可逆，也即 A 是奇异矩阵。(性质 7 实际上保证了非奇异矩阵的行列式不为零)

性质 9 看起来 naive 实际上一点也不显然：$\det(AB) = \det A \det B$，通过这个我们可以知道 $\det I = \det A \det A^{-1}$，也就是说 $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$，这简直太代数了。

性质 10 是 $\det A^T = \det A$，嗯哼。我觉得这就是为什么行列式这个名字有“列”这个字。我之前的判断终于在此得到了补完：在一种关于行的度量方式中，转置联系起矩阵的行列。

关于性质 10 的证明，我用 PLU 分解重写一下：

$\det(U^T L^T P^T) = \det(PLU)$，首先用性质 9 分解以下，然后考虑：

L 是下三角矩阵，U 是上三角矩阵，转置不改变行列式。

那么对于行交换矩阵 P，其行列式不是 1 就是 -1，而 $PP^T = I$（其实就是我们好久之前推出来的 $P^T = P^{-1}$），再应用性质 9 的推论就是 $\det P^T = \frac{1}{\det P}$，所以 $\det P^T = \det P$

最后提了一嘴置换群本身的性质，但我觉得还得提另一件更重要的事情。

从行列式开始，我们真正开始联系起来矩阵的行列。(至少是方阵的🤓)